物理 BI/BII のためのベクトル入門 II
-Home Page（印刷版）-

新井一郎

(第 1 版)

目 次

第1章　関数のグラディエント（勾配）

1.1　ナブラ演算子

1.1.1　偏微分演算子

1. 多変数関数　**$f(x_1,x_2,...,x_n)$**
2. 関数 f の変数 x_i についての微分係数　**偏微分係数　$\partial f/\partial x_i$**
   ¶ x_i 以外の変数をすべて定数と考えて計算した x_i についての微分係数
3. 偏微分演算子　**$\partial/\partial x_i$**
   （関数 f へ演算子 $\partial/\partial x_i$ をかけた結果）＝偏微分係数　$\partial f/\partial x_i$
4. 数学的な記法　**$(\partial/\partial x_i)f=\partial f/\partial x_i$**

1.1.2　ナブラ演算子とその代表的な演算

1. ナブラ演算子
   偏微分演算子のベクトル　∇
   ¶ 空間座標が基準；（換算係数×偏微分演算子）$_i$ を並べたもの。
2. 一般の座標系（ξ_1,ξ_2,ξ_3) の場合
   $((1/h_1)\,\partial/\partial\xi_1,\ (1/h_2)\,\partial/\partial\xi_2,\ (1/h_3)\,\partial/\partial\xi_3)$
   ¶ 座標軸方向の傾き（変化率）
   ¶ 係数 $h_i(i=1,2,3)$ は変数の微小な増分 $\Delta\xi_i$ を長さに換算
3. デカルト座標系の場合　**$(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$**
   ¶ $h_x=h_y=h_z=1$
4. ３つの代表的な演算
   - グラディエント (勾配）
   - ダイバージェンス（発散）
   - ローテーション（回転）
5. 数学的な記法　-グラディエント演算の例-
   $\mathrm{grad}\ f\equiv\nabla f=(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z)$

1.2　グラディエント (勾配）

1.2.1　数学的表現

1. スカラー関数 $f(x,y,z)$ へナブラ演算子∇をかける
   $\mathrm{grad}\ f\equiv\nabla f=(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z)$

2. 新たなベクトル　**∇ f**

3. ベクトル∇ f の元　**各座標軸方向の関数 f の傾き**

1.2.2 いくつかの計算例

1. f(x,y,z)=xyz
   ∇ f=(yz,zx,xy)

2. f(x,y,z)=r $\equiv$ $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$
   ∇ f=(x/r, y/r, z/r)=(x, y, z)/r $\equiv$ **r**/r
   ¶ よく使う公式

1.3 他の座標系におけるグラディエント（勾配）

1.3.1 極座標の場合

1. 座標系　**(r,θ,ϕ)**

2. 換算係数

   - **h_1=1**
   - **h_2=r**
   - **h_3=r　sinθ**

3. グラディエント
   grad f $\equiv$（∂ f/∂ r, (1/r) ∂ f/∂ θ, (1/r　sinθ) ∂ f/∂ ϕ）
   ¶ よく使う公式

1.3.2 円筒座標の場合

1. 座標系　**(r,θ,z)**

2. 換算係数

   - **h_1=1**
   - **h_2=r**
   - **h_3=1**

3. グラディエント
   grad f $\equiv$（∂ f/∂ r, (1/r) ∂ f/∂ θ, ∂ f/∂ z）
   ¶ よく使う公式

第2章　ベクトルのダイバージェンス（発散）

2.1　ダイバージェンス（発散）

2.1.1　デカルト座標におけるダイバージェンス

1. ベクトル関数　**f(x,y,z)=**（$\mathbf{f}_x$**(x,y,z),**$\mathbf{f}_y$**(x,y,z), **$\mathbf{f}_z$**(x,y,z))**
2. div 演算子　**div f(x,y,z)**
   ¶ ベクトル関数（**f**(x,y,z)）に作用
3. ダイバージェンス div **f**(x,y,z) は**スカラー関数**
   ¶ ベクトルの内積に似ている。
4. 別の表現　**div f(x,y,z)** ≡∇・**f(x,y,z)**
5. 数学的な記法　**div f=** ∂ $\mathbf{f}_x$/∂ **x+** ∂ $\mathbf{f}_y$/∂ **y+** ∂ $\mathbf{f}_z$/∂ **z**

2.1.2　ダイバージェンスの物理的な意味

1. 流速の場としてのベクトル関数　($\mathbf{f}_x$**(x,y,z),**$\mathbf{f}_y$**(x,y,z), **$\mathbf{f}_z$**(x,y,z))**
2. 微小体積　$\mathbf{V}_{xyz}=\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{y}\Delta\mathbf{z}$
3. yz 面に平行な面を通る流体の湧きだし量
   $\Delta\mathbf{f}_{net}=\mathbf{f}_x(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{y}\Delta\mathbf{z}-\mathbf{f}_x(\mathbf{x})\Delta\mathbf{y}\Delta\mathbf{z}$
   - 第 1 項は x+Δx にある yz 面に平行な面を通る流量/面積
   - 第 2 項は x にある yz 面に平行な面を通る流量/面積

   ∂ f_x/∂ x の意味（流体の湧きだし量/体積）
   $\Delta\mathbf{f}_{net}/\mathbf{V}_{xyz}=(\mathbf{f}_x(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{f}_x(\mathbf{x}))/\Delta\mathbf{x}\equiv\partial\mathbf{f}_x/\partial\mathbf{x}$
4. div **f**(x,y,z) の意味
   座標 (x, y, z) 付近での流体の全湧きだし量/体積

2.2　他の座標におけるダイバージェンス（発散）

2.2.1　ダイバージェンスの一般形

1. 全湧きだし量/体積を測る微小体積
   $\mathbf{V}_{123}=\mathbf{h}_1\Delta\xi_1$（たて）× $\mathbf{h}_2\Delta\xi_2$（よこ）× $\mathbf{h}_3\Delta\xi_3$（たかさ）
   ¶ 係数 h_i(i=1,2,3) は変数の微小な増分 $\Delta\xi_i$ を長さに換算

2. ξ_1 軸方向の湧きだし量
   $(\partial\ \mathbf{S}_{23} f_1 / \partial\ \xi_1)\ \Delta\xi_1$
   $\mathrm{S}_{23} = \mathrm{h}_2 \Delta\xi_2\ \mathrm{h}_3 \Delta\xi_3$
   ¶ S_{23} は微小な断面積；ξ_2 軸、ξ_3 軸も同様

3. ダイバージェンス
   div f=(1/V$_{123}$) (∂ S$_{23}$f$_1$/∂ ξ_1+ ∂ S$_{31}$f$_2$/∂ ξ_2+ ∂ S$_{12}$f$_3$/∂ ξ_3)
   ¶ 全湧きだし量/体積; よく使う公式

2.2.2 極座標の場合

1. 座標系　**(r,θ,ϕ)**
2. 換算係数
   - **h$_1$=1**
   - **h$_2$=r**
   - **h$_3$=r sinθ**
3. ダイバージェンス
   div f= (1/r^2) ∂ r^{2}f$_r$/∂ r+ (1/r sinθ) ∂ sinθf$_\theta$ /∂ θ + (1/r sinθ) ∂ f$_\phi$ /∂ ϕ ;
   ¶ よく使う公式

2.2.3 円筒座標の場合

1. 座標系　**(r,θ,z)**
2. 換算係数
   - **h$_1$=1**
   - **h$_2$=r**
   - **h$_3$=1**
3. ダイバージェンス
   div f= (1/r) ∂ rf$_r$/∂ r+ (1/r) ∂ f$_\theta$ /∂ θ + ∂ f$_z$/∂ z
   ¶ よく使う公式

第3章　ベクトルのローテーション（回転）

3.1　ローテーション（回転）

3.1.1　デカルト座標におけるローテーション

1. ベクトル関数　**f(x,y,z)=（$\mathbf{f}_x$(x,y,z),$\mathbf{f}_y$(x,y,z), $\mathbf{f}_z$(x,y,z))**
2. rot 演算子　**rot f(x,y,z)**
   ¶ ベクトル関数（**f**(x,y,z)）に作用
3. ローテーション rot **f**(x,y,z) は**ベクトル関数**
   ¶ ベクトルの外積に似ている。
4. 別の表現　**rot f(x,y,z)** ≡∇× **f(x,y,z)**
5. 数学的な記法　**rot f=(∂ $\mathbf{f}_z$/∂ y-∂ $\mathbf{f}_y$/∂ z, ∂ $\mathbf{f}_x$/∂ z-∂ $\mathbf{f}_z$/∂ x, ∂ $\mathbf{f}_y$/∂ x-∂ $\mathbf{f}_x$/∂ y)**
6. ベクトル∇× **f** の元　**各座標軸方向のベクトル関数 f の回転（i.e. 角速度ベクトルの 2 倍）**

3.1.2　いくつかの計算例

1. **f**(x,y,z)=(V_x, V_y, 0)
   ∇× **f**=(0, 0, 0)
   ¶ V_x、V_y は定数
   ¶ 定数ベクトルの回転はゼロ
2. **f**(x,y,z)=(-ω_zy, ω_zx, 0)
   ∇× **f**=(0, 0, 2ω_z)
3. **f**(x,y,z)=(x, y, z)
   ∇× **f**=(0, 0, 0)
   ¶ 位置ベクトルの回転はゼロ
4. **f**(x,y,z)=(x/r, y/r, z/r)
   ∇× **f**=(0, 0, 0)
   ¶ **f** は関数 1/r のグラディエント
   ¶ 関数のグラディエントの回転はゼロ

3.2　他の座標におけるローテーション（回転）

3.2.1　極座標の場合

1. 座標系　**(r,θ,ϕ)**

2. 換算係数

   - $\mathbf{h_1=1}$
   - $\mathbf{h_2=r}$
   - $\mathbf{h_3=r\ \ sin\theta}$

3. ローテーション
   rot f $\equiv$ **（(1/r sin** θ **)** ∂ **f**$_\theta$**/**$\partial\phi$ **-(1/r)** ∂ **f**$_\phi$**/**$\partial\theta$**,** ∂ **f**$_\phi$**/**∂ **r -(1/r sin** θ **)** ∂ **f**$_r$**/**$\partial\phi$**, (1/r)** ∂ **f**$_r$**/**$\partial\theta$ **-**∂ **f**$_\theta$**/**∂ **r ）**
   ¶ よく使う公式

3.2.2 円筒座標の場合

1. 座標系 **(r,**θ**,z)**

2. 換算係数

   - $\mathbf{h_1=1}$
   - $\mathbf{h_2=r}$
   - $\mathbf{h_3=1}$

3. ローテーション
   rot f $\equiv$ **（**∂ **f**$_\theta$**/**∂ **z-(1/r)** ∂ **f**$_z$**/**$\partial\theta$**,** ∂ **f**$_z$**/**∂ **r -**∂ **f**$_r$**/**∂ **z, (1/r)** ∂ **f**$_r$**/**$\partial\theta$ **-**∂ **f**$_\theta$**/**∂ **r ）**
   ¶ よく使う公式