令和2年度

筑波大学大学院　数理物質科学研究科　入学試験

物理学専攻　試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

1. 5つの問題（I〜V）がある。問題Iでは、10問中5問を選んで解答せよ。問題II〜Vでは、基礎問題と応用問題（[A]、[B]）の両方とも解答せよ。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。解答は、日本語と英語のどちらで書いてもよい。

   There are five problems (I〜V). For Problem I, select and answer five out of the ten questions. Each of Problems II〜V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are given first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same. You may write the answer either in Japanese or in English.

2. それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。

   Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.

3. 下書き用紙は採点の対象としない。

   Draft sheets will not be marked.

I

以下の 10 問のうち5問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。
ただし、[A]、[B]、[C] の各問題群の中から最低 1 問以上選択すること。

[A]

問 1　以下の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問 2　以下の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問 3　行列 A の指数関数を $\exp A = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ で定義する。ただし、I は単位行列を表す。以下の行列 A に対して、$\exp A$ を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

[B]

問 4　複素数 $z = x + iy$（i は虚数単位）を用いて表される複素数 e^{z^3} の実部と虚部を計算せよ。

問 5　以下の複素積分を計算せよ。ただし、積分路 C は $|z| = 2$ を反時計回りにまわるものとする。

$$\oint_C dz \, \frac{1}{z^3 - 1}$$

問 6　関数 $f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ に対して以下のフーリエ余弦級数展開を考える。

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(kx)$$

係数 C_0 と C_k $(k \neq 0)$ を求めよ。

（次頁につづく）

[C]

問 7　3 次元空間における位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ に対して、以下を計算せよ。

$$\nabla \cdot [(\nabla \times \vec{r}) + \vec{r}]$$

問 8　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y}$$

問 9　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2}{dx^2}y - 3\frac{d}{dx}y + 2y = 0$$

問 10　以下の積分を計算せよ。ただし、領域 R は $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$（$a$ は正の定数）かつ $x, y > 0$ を表す。

$$\int\int_R x^3 y \, dxdy$$

I

Answer five out of the following ten questions on condition that you have to choose at least one question in each of the groups [A], [B] and [C]. Be sure to write the question numbers on the answer sheet clearly.

[A]

Q1. Find the inverse matrix of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Q2. Calculate the determinant of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Q3. Let us define the exponential function of a matrix A as $\exp A = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ with I the unit matrix. Find $\exp A$ for the following matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

[B]

Q4. Let $z = x + iy$ be a complex number with i the imaginary unit. Calculate the real and imaginary parts of the complex number e^{z^3}.

Q5. Let z be a complex number. Evaluate the following integral where the contour C goes around the circle $|z| = 2$ once counterclockwise.

$$\oint_C dz \, \frac{1}{z^3 - 1}$$

Q6. Consider the following Fourier cosine series for the function $f(x) = |x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$. Evaluate C_0 and C_k $(k \ne 0)$.

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(kx)$$

(To be continued on the next page)

[C]

Q7. Let $\vec{r} = (x, y, z)$ be a three-dimensional position vector. Evaluate the following expression.

$$\nabla \cdot [(\nabla \times \vec{r}) + \vec{r}]$$

Q8. Solve the following differential equation.

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y}$$

Q9. Let y be a function of x. Find the general solution of the following differential equation.

$$\frac{d^2}{dx^2}y - 3\frac{d}{dx}y + 2y = 0$$

Q10. Evaluate the following integral where the region R represents $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ $(a > 0)$ and $x, y > 0$.

$$\int\int_R x^3 y \, dx dy$$

II.

[A]

問 1. 質量 m_{A} と m_{B} の二つの質点 A と B が、それぞれ速度 $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ と $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ で運動している。この系の重心運動の運動エネルギーを書け。

問 2. 質量 m_{A} と m_{B} の二つの質点 A と B が、それぞれ速度 $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ と $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ で運動している。両者が弾性衝突し質点 A の速度が $\vec{v}_{\mathrm{A}}{}'$ となった。このとき、質点 B の速度を求めよ。

問 3. 質量 M、円柱軸回りに慣性モーメント I を有する剛体円柱が、円柱軸回りに角速度 ω で回転しながら、並進速度 $\vec{v}$ で運動している。このとき、剛体円柱の運動エネルギーを求めよ。

（次頁につづく）

[B]

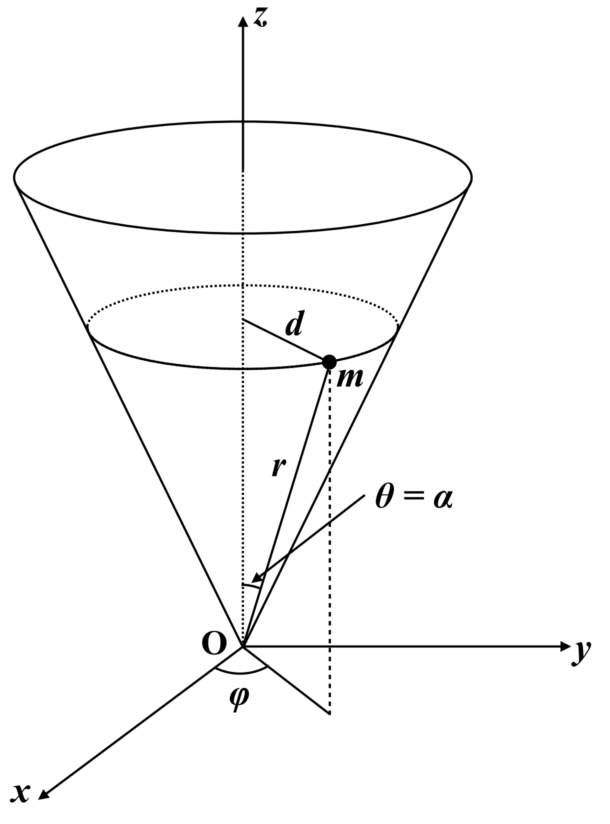
下図のように、質量 m の質点が、軸が鉛直で頂点が原点 O にある下向きの滑らかな円錐面上を運動する。この運動を、極座標 r, θ, φ で考える。円錐の半頂角を α、重力加速度を g として以下の問に答えよ。

問 1.　質点のラグランジアン L を求めよ。

問 2.　問 1 で求めたラグランジアン L についてのオイラー・ラグランジュ方程式を書き下し、質点の運動方程式を求めよ。

問 3.　質点が半径 d の円周上を円運動するとき、その角速度 ω は $\omega = \sqrt{\frac{g\cot\alpha}{d}}$ となることを示せ。

問 4.　半径 d の円周上を円運動する質点の位置を、角運動量が変化しないように r 方向に微小量 s だけずらした。このとき、s の満たす方程式を求め、質点の運動を論ぜよ。



II

[A]

Q1. Write the kinetic energy associated with the center of mass of two particles A and B, which have masses m_{A} and m_{B} and velocities $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ and $\vec{v}_{\mathrm{B}}$, respectively.

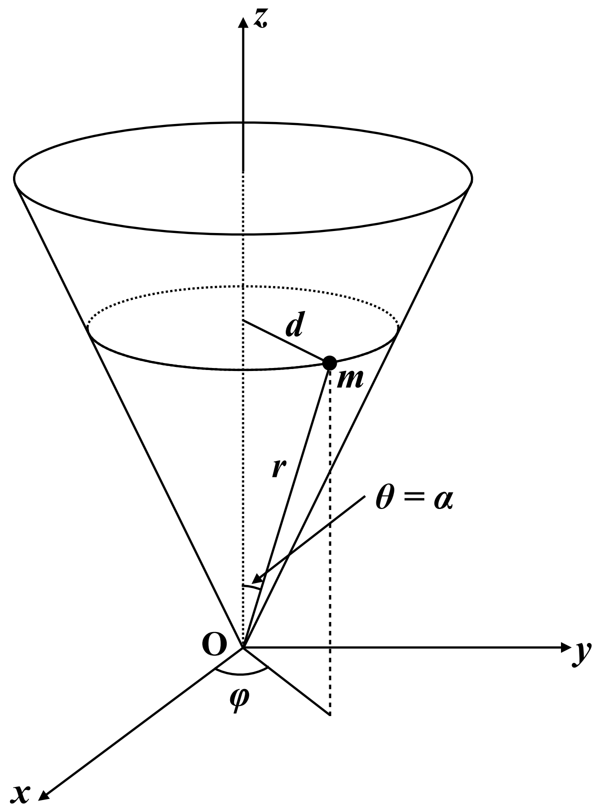
Q2. Two particles A and B with masses of m_A and m_B initially possess the velocities $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ and $\vec{v}_{\mathrm{B}}$, respectively. After an elastic collision between them, the velocity of the particle A became $\vec{v}_{\mathrm{A}}{}'$. Write the velocity of the particle B after the collision.

Q3. A rigid cylinder with mass M and the moment of inertia I about its axis is moving with an angular velocity ω about its axis and a translational velocity $\vec{v}$. Find the kinetic energy of the cylinder.

(To be continued on the next page)

[B]

Consider the motion of a point mass m constrained on the smooth inner surface of a downward circular cone. We define the polar coordinates r, θ, and φ as in figure below. The apex of the circular cone is located at the origin O, and its axis is aligned with the vertical direction. The half-apex angle of the circular cone is α. The gravitational constant is g. Answer the following questions.



Q1. Write down the Lagrangian L of the point mass.

Q2. Write down the Euler-Lagrange equations for the Lagrangian L obtained in Q1, and the equations of motion of the point mass.

Q3. Consider a circular motion of the point mass on the circumference of a circle with radius d. Show that the angular velocity ω is given

(To be continued on the next page)

by $\omega = \sqrt{\frac{g\cot\alpha}{d}}$.

Q4. The point mass is displaced by a small amount s along the r direction from its original circular motion while keeping its angular momentum the same. Find the equation for s, and discuss the motion of the point mass.

III.

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) として以下の問 [A],[B] に答えよ。

[A]

問 1．一次元系の箱 $x \in [0, L]$ の中で運動する粒子の波動関数は $\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n = 1, 2, \cdots$ で与えられる。$\psi_n(x)$ が規格化条件を満たすような正の実数 A_n を求めよ。

問２．スピン 1/2 のスピン演算子は $\overrightarrow{S} = (S_x, S_y, S_z)$, $S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $S_z = \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で与えられる。スピンに磁場 $\overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_z)$ がかかったとき、ハミルトニアンは $H = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S}$ となる。ここで g は g 因子、μ_B はボーア磁子である。このとき H を 2×2 の行列形式で書き表せ。また、H の二つの固有値を求めよ。

問３．軌道角運動量演算子 $\overrightarrow{L} = (L_x, L_y, L_z)$ について、交換子 $[L_x, L_y]$ を書け。必要ならば、軌道角運動量演算子の定義 $L_x = r_y p_z - r_z p_y$, $L_y = r_z p_x - r_x p_z$, $L_z = r_x p_y - r_y p_x$, および位置と運動量の交換子 $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$ $(i, j = x, y, z)$ を用いてよい。

（次頁へ続く）

[B]

２次元平面中の荷電粒子が、面と垂直な一様磁場と調和振動子型ポテンシャルの両方を受けて運動する場合を考える。このとき、ハミルトニアンは

$$H = \frac{\left(\overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A}\right)^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

で与えられる。ここで、q は荷電粒子の電荷、m は荷電粒子の質量、$\overrightarrow{p} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ は運動量演算子、$\overrightarrow{A} = \frac{B}{2}(-y, x)$ は一様磁場 B を与えるベクトルポテンシャル、Ω は調和振動子型ポテンシャルの角周波数である。
このハミルトニアンを極座標 (r, ϕ) を用いて書きかえる。ここで 直交座標と極座標の関係は

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

である。このとき、ハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + i\frac{\hbar\omega_c}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{m\left(\omega_c^2 + 4\Omega^2\right)}{8}r^2$$

となる。ここで $\omega_c = \frac{qB}{m}$ はサイクロトロン周波数である。

問１. 時間に依存しないシュレディンガー方程式 $H\psi(r,\phi) = E\psi(r,\phi)$ の解について、$\psi(r,\phi) = u(r)e^{i\alpha\phi}$ と変数分離した形を仮定する。このとき、波動関数の一価性から α が満たすべき条件を述べよ。また、動径方向の波動関数 $u(r)$ が満たす固有値方程式を書き下せ。

問２. $\alpha = 0$ とする。このとき、基底状態の波動関数は、正のパラメーター ℓ_B および正の係数 N を用いて $u_0(r) = N\exp\left[-\left(\frac{r}{\ell_B}\right)^2\right]$ のように書くことができる。$u_0(r)$ が問１で求めた $u(r)$ に対する固有値方程式の解となるように ℓ_B を決定せよ。また、対応する固有値 E_0 を求めよ。さらに、$\psi_0(r,\phi) = u_0(r)$ が規格化条件を満たすように N を定めよ。

問３. 問２で求めた固有値 E_0 は磁場 B の関数である。このとき $M = -\frac{\partial E_0}{\partial B}$ を、磁場依存性をあらわに含む形で求めよ。

問４. $\psi_0(r,\phi) = u_0(r)$ に対する r の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ。答えは N と ℓ_B を含む形で書いてもよい。

III.

Answer the following questions [A] and [B]. We set $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ with the Planck constant h.

[A]

Q1. Consider a particle in a one-dimensional box, $x \in [0, L]$. The wave function of the particle is given as $\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, with $n = 1, 2, \cdots$. Determine the positive real number A_n such that $\psi_n(x)$ is normalized.

Q2. A spin operator with $S = 1/2$ is given as $\overrightarrow{S} = (S_x, S_y, S_z)$, where $S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$, and $S_z = \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. When a magnetic field, $\overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_z)$, is applied to the spin, the Hamiltonian is given as $H = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S}$ where g is the g-factor and μ_B is the Bohr magneton. Write the Hamiltonian H in the form of 2×2 matrix. Derive two eigenvalues of H.

Q3. Write down a commutator $[L_x, L_y]$ for an orbital angular momentum operator $\overrightarrow{L} = (L_x, L_y, L_z)$. If necessary, one may use the definition of $\overrightarrow{L}$, $L_x = r_y p_z - r_z p_y$, $L_y = r_z p_x - r_x p_z$, $L_z = r_x p_y - r_y p_x$, and the commutator of coordinate and momentum operators, $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$ $(i, j = x, y, z)$.

(To be continued on the next page)

[B]

Consider a charged particle on a two-dimensional plane in a uniform magnetic field perpendicular to the plane and a harmonic potential. The Hamiltonian is given by

$$H = \frac{\left(\overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A}\right)^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

where q is the electric charge, m is the mass, $\overrightarrow{p} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ is the momentum operator, $\overrightarrow{A} = \frac{B}{2}(-y, x)$ is a vector potential corresponding to the uniform magnetic field B, and Ω is the angular frequency of the harmonic potential.
Let us rewrite the Hamiltonian by using the polar coordinates, (r, ϕ), defined as

$$x = r\cos\phi,$$

$$y = r\sin\phi.$$

Then, the Hamiltonian is rewritten as

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + i\frac{\hbar\omega_c}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{m\left(\omega_c^2 + 4\Omega^2\right)}{8}r^2,$$

where $\omega_c = \frac{qB}{m}$ is the cyclotron frequency.

Q1. Suppose that the solution of the time-independent Schrödinger equation, $H\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi)$, is written in a form $\psi(r, \phi) = u(r)e^{i\alpha\phi}$. State the condition imposed on the parameter α such that the wave function $\psi(r, \phi)$ is single-valued. Write down the eigenvalue equation for the radial wave function $u(r)$.

Q2. If we set $\alpha = 0$, the wave function of the ground state can be written as $u_0(r) = N\exp\left[-\left(\frac{r}{\ell_B}\right)^2\right]$, where ℓ_B is a positive-valued parameter and N is a positive normalization constant. Determine ℓ_B such that $u_0(r)$ becomes the solution of the eigenvalue equation derived in Q1. Derive the eigenenergy E_0 for $u_0(r)$. Determine N such that the wave function $\psi(r, \phi) = u_0(r)$ satisfies the normalization condition.

Q3. The eigenenergy E_0 is a function of B. Calculate the quantity $M = -\frac{\partial E_0}{\partial B}$. The answer should be presented so that the B-dependence is manifest.

Q4. Calculate the expectation value $\langle r \rangle$ for $\psi(r, \phi) = u_0(r)$. The answer may contain N and ℓ_B.

Ⅳ

[A]

問 1. x軸の正の方向に電場の強さEの一様な電場とz軸の正の方向に磁束密度Bの一様な磁場がかけられた空間の中で、電荷qの荷電粒子が速さvでy軸上を直進する。この時のvを求めよ。ただし、荷電粒子が受ける力は電場と磁場によるローレンツ力のみとする。

問 2. 電場を$\vec{E}$、磁束密度を$\vec{B}$とすると、以下の式は電磁誘導の法則を積分形で表したものである。

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

ここで、Cは任意の面Sを囲む閉曲線である。左辺に対するストークスの定理を示し、電磁誘導の法則を微分形で表せ。

問 3. 真空中で、極板の面積S、間隔dの平行平板コンデンサーに交流電圧 $V = V_0 \sin \omega t$ をかける。ここで、ωは角周波数、tは時間である。また、真空の誘電率をε_0とする。以下の問いに答えよ。

(1) 極板間に生じる電束密度Dを求めよ。

(2) 平行平板コンデンサーの電気容量をCとすると、極板間に生じる変位電流 JをCを用いて表せ。

（次頁につづく）

[B]

図 1 のように、真空中に二つの点電荷$-Q_1$と$+Q_1$がそれぞれ点 A と点 B に間隔lで置かれている。AB の中点を原点とし、原点 O からrの距離に点 P があり、線分 OP とx軸がなす角をθとする。点 P での電場の強さをEとし、極座標$r\theta$平面における電場の極座標成分をE_rとE_θとする。$l \ll r$であり、$-Q_1$と$+Q_1$からなる系を電気双極子とみなすことができる。ここで、電気双極子モーメントの大きさをp_1、真空の誘電率をε_0とする。また、$p_1 = Q_1 l$である。以下の問いに答えよ。$\left(l/r\right)$の 2 次以上の項は無視することができる。

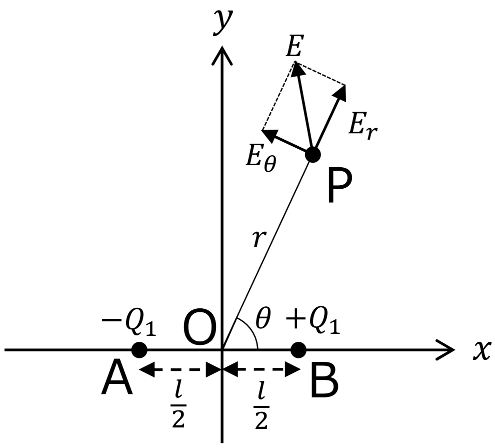


図 1

問1.　二つの点電荷による点 P での電位Vが以下の式で表せることを示し、等電位面の概形を図示せよ。

$$V = \frac{p_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ただし、AP の距離r_{AP}と BP の距離r_{BP}は以下のように近似することができる。

$$r_{\mathrm{AP}} \cong r + \frac{l}{2}\cos\theta \ , \qquad r_{\mathrm{BP}} \cong r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

問2.　点 P における電場の極座標成分E_rとE_θが以下であることを示せ。

$$E_r = \frac{p_1 \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \ , \qquad E_\theta = \frac{p_1 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

（次頁につづく）

次に、図 2 のように、真空中において、互いに平行な$\overrightarrow{p_1}$と$\overrightarrow{p_2}$の電気双極子モーメントを持つ二つの電気双極子を考える。これらの相対的な位置を$\vec{r}$、$\overrightarrow{p_1}$と$\vec{r}$のなす角度をθとする。また、$\overrightarrow{p_1}$、$\overrightarrow{p_2}$、$\vec{r}$の大きさをそれぞれp_1、p_2、rとする。次の問いに答えよ。

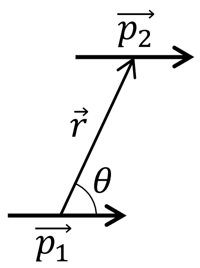


図 2

問3.　電気双極子間のポテンシャルエネルギーUは、

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}}{r^3} - \frac{3(\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r})(\overrightarrow{p_2}\cdot\vec{r})}{r^5}\right\}$$

と表すことができる。p_1とp_2を用いて、Uをrとθの関数で表せ。

問4.　rを一定とすると、θの変位に対して互いの電気双極子が安定になる時のθはいくらか。ただし、$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$とする。その時の電気双極子間に働く力$F$を求めよ。また、この力は引力か斥力かを答えよ。

IV

[A]

Q1. In a space with a uniform electric field of magnitude E in the positive direction of x-axis and a uniform magnetic field of flux density B in the positive direction of z-axis, a particle of charge q moves straight along the y-axis with the speed v. Find v. Assume that the Lorentz force by the electric and magnetic fields is the only external force applied to the particle.

Q2. The integral form of the law of electromagnetic induction is given as follows:

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \ ,$$

where $\vec{E}$ is the electric field, $\vec{B}$ is the magnetic flux density, and C is the closed curve that surrounds an area S. Apply Stokes' theorem to the left-hand side of above equation, and write down the differential form of the law.

Q3. In vacuum, an alternating-current voltage $V = V_0 \sin \omega t$ is applied to a parallel-plate capacitor which is composed of two conductive plates with area S and separated by a distance d. Here, ω is the angular frequency and t is the time. Let the electric permittivity of vacuum be ε_0. Answer the following questions.

(1) Find the electric flux density D between the two conductive plates.

(2) The capacitance of the capacitor is C. Find the displacement current J which is produced between the two conductive plates and express it using C.

(To be continued on the next page)

[B]

In vacuum, two point charges $-Q_1$ and $+Q_1$ are placed at points A and B, respectively, which are separated by a distance l, as shown in Figure 1. r is the distance of point P from the origin O, which is the middle point between A and B, and θ is the angle between the line OP and the x–axis. The magnitude of the electric field at P is given by E, and the r-component and the θ-component of the electric field in the polar coordinates (r,θ) are given by E_r and E_θ, respectively. The system of $-Q_1$ and $+Q_1$ can be regarded as an electric dipole, where $l \ll r$. Let the magnitude of the electric-dipole moment be p_1, the electric permittivity of vacuum be ε_0. Here, p_1 is equal to $Q_1 l$. Answer the following questions. The second-order and higher-order terms of $\left({}^{l}/_{r}\right)$ can be neglected.

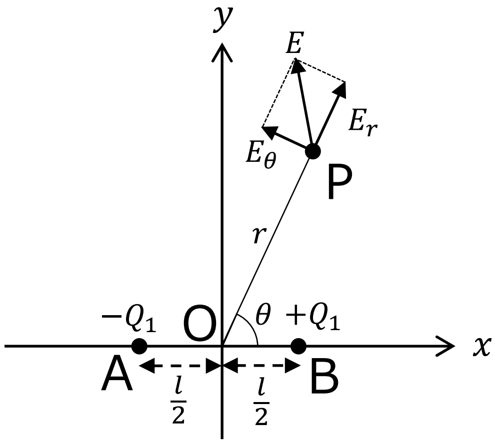


Figure 1

Q1. Show that the potential V at P by the two point charges is given by the following equation:

$$V = \frac{p_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ ,$$

and sketch the equipotential surfaces around the two point charges. Here, distances r_{AP} between AP and r_{BP} between BP can be approximated as follows:

$$r_{\mathrm{AP}} \cong r + \frac{l}{2}\cos\theta \ , \qquad r_{\mathrm{BP}} \cong r - \frac{l}{2}\cos\theta \ .$$

(To be continued on the next page)

Q2. Show that the r-component E_r and the θ-component E_θ of the electric field at P are given by the following equations:

$$E_r = \frac{p_1 \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\ , \qquad E_\theta = \frac{p_1 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\ .$$

Now, suppose that two electric dipoles with electric-dipole moments $\overrightarrow{p_1}$ and $\overrightarrow{p_2}$ are placed in parallel to each other in vacuum, as shown in Figure 2. The relative position between the two electric dipoles is given by $\vec{r}$, and the angle between $\overrightarrow{p_1}$ and $\vec{r}$ is given by θ. Here, the magnitudes of $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, and $\vec{r}$ are p_1, p_2, and r, respectively. Answer the following questions.

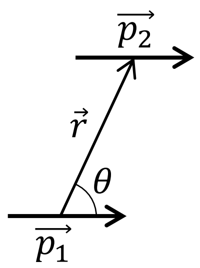


Figure 2

Q3. The potential energy U between the two electric dipoles is given by the following equation:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}}{r^3} - \frac{3(\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r})(\overrightarrow{p_2}\cdot\vec{r})}{r^5}\right\}\ .$$

Write down U as functions of r and θ, using p_1 and p_2.

Q4. For $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le +\frac{\pi}{2}$, find θ when the two electric dipoles are stable against a displacement in θ, where r is kept constant. Find the magnitude of the electrostatic force F between the two electric dipoles, and answer whether F is attractive or repulsive.

V

[A]

問 1.　系の温度をT、圧力をp、体積をV、エントロピーをSとする。ヘルムホルツの自由エネルギーをFとすると、Fの無限小変化は $dF = -SdT - pdV$ となる。このとき、ギブスの自由エネルギーGは $G = F + pV$ と定義される。以下の問に答えよ。

(1) Gの無限小変化dGを計算し、S, V, dT, dpを用いて書け。

(2) Gの圧力一定の偏微分 $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ と、Gの温度一定の偏微分 $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$ は、それぞれどのような物理量に相当するか。

問 2.　以下の状態量は 2 次相転移の前後で連続か、不連続か、それぞれ答えよ。

エントロピー、熱容量。

（次頁につづく）

[B]

1 種類の N 個の粒子からなる系について、その気体状態と固体状態の２相共存曲線を示す温度 T と圧力 p の関係を求める。固体状態の原子をバラバラにするのに必要なエネルギーを１原子当たりϵとし、固体状態の１原子当たりの体積を v とする。固体状態の原子はアインシュタイン模型に従い振動数ωで振動する3次元の振動子の集まりであるとする。気体状態は単原子の理想気体であるとする。m を原子１個の質量、k_B をボルツマン定数、h をプランク定数 ($\hbar = h/2\pi$)として、以下の問いに答えよ。

問１．粒子数Nの単原子理想気体の自由エネルギーF は体積を V として以下の式(1)で与えられる。

$$F = -Nk_BT\left\{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right) + \ln\left(\frac{V}{N}\right) + 1\right\} \qquad (1)$$

この気体の化学ポテンシャルを求めよ。

固体状態を考える。粒子 1個の分配関数は式(2)で与えられる。なお、ゼロ点振動のエネルギーは無視している。

$$z = \exp\left(\frac{\epsilon}{k_BT}\right)\sum_{n_x=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{n_x\hbar\omega}{k_BT}\right]\ \sum_{n_y=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{n_y\hbar\omega}{k_BT}\right]\ \sum_{n_z=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{n_z\hbar\omega}{k_BT}\right] \qquad (2)$$

問２．粒子数をNとしてヘルムホルツの自由エネルギーF を求めよ。

問３．圧力を p として粒子数Nの固体状態のギブスの自由エネルギーを求めよ。

問４．固体状態の化学ポテンシャルを求めよ。

気体状態と固体状態の２相共存曲線を示す温度 T と圧力 p の関係を求める。
問５．２相が共存する条件を求めよ。

問６．２相共存曲線において$pv \ll \epsilon$の極限での圧力 p の式を書け。$pv \ll \epsilon$ で $k_\mathrm{B}T \gg \hbar\omega$のとき p のω依存性を求めよ。

V

[A]

Q1. Consider a system with temperature T, pressure p, volume V, and entropy S. Let F be the Helmholtz free energy and an infinitesimal variation of F is written as $dF = -SdT - pdV$. The Gibbs free energy G is defined as $G = F + pV$. Answer the following questions.

(1) Write down the infinitesimal variation of the Gibbs free energy dG by using $S, V, dT,$ and dp.

(2) Answer the physical quantities that are given by the partial derivatives of G under conditions of constant p, $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$, and T, $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$, respectively.

Q2. Answer whether each of the state quantities listed below is continuous or discontinuous in a second-order phase transition.

entropy, heat capacity.

(To be continued on the next page)

[B]

Consider a system composed of N atoms of one kind. Let us find a relationship between the temperature T and the pressure p on a solid-gas coexistence curve. The energy of vaporization of one atom is ϵ. The volume of one atom in the solid is v. The atoms in the solid state oscillate at a frequency ω described as an Einstein solid. The atom in the solid state is expressed as a three-dimensional harmonic oscillator. The atoms in the gas state are a single-atom ideal gas. Answer the following questions, with the mass of atom m, the Boltzmann constant k_B, and the Planck constant h ($\hbar = h/2\pi$).

Q1. The Helmholtz free energy of a single-atom ideal gas composed of N atoms is given by equation (1).

$$F = -Nk_BT\left\{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right) + \ln\left(\frac{V}{N}\right) + 1\right\} \qquad (1)$$

where V is the volume.
Find the chemical potential of the gas.

Consider the solid state. The partition function of one three-dimensional harmonic oscillator is given by equation (2).

$$z = \exp\left(\frac{\epsilon}{k_BT}\right)\sum_{n_x=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{n_x\hbar\omega}{k_BT}\right]\sum_{n_y=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{n_y\hbar\omega}{k_BT}\right]\sum_{n_z=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{n_z\hbar\omega}{k_BT}\right] \qquad (2)$$

Q2. Find the Helmholtz free energy of the solid state composed of N atoms.

Q3. Find the Gibbs free energy of the solid state composed of N atoms, where p is the pressure.

Q4. Find the chemical potential of the solid state.

Find a relationship between the temperature T and the pressure p on a solid-gas coexistence curve.

Q5. Find the condition of a solid-gas coexistence.

Q6. Find the pressure p in the limit of $pv \ll \epsilon$ on the solid-gas coexistence curve. Write down ω dependence of p in the limit of $pv \ll \epsilon$ and $k_BT \gg \hbar\omega$.