2019年度

筑波大学大学院　数理物質科学研究科　入学試験

物理学専攻　試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

1. 5つの問題（I～V）がある。問題Iでは、10問中5問を選んで解答せよ。問題II～Vでは、基礎問題と応用問題（[A]、[B]）の両方とも解答せよ。問題文は、最初日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。解答は、日本語と英語のどちらで書いてもよい。

   There are five problems (I～V). For Problem I, select and answer five out of the ten questions. Each of Problems II～V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are given first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same. You may write the answer either in Japanese or in English.

2. それぞれの問題に一枚の解答用紙を用い解答せよ。また、解答した問題番号を明記せよ。

   For each problem, use one sheet of answer paper. Write the problem number at the top of the sheet.

3. 下書き用紙は採点の対象としない。

   Draft sheets will not be marked.

I

以下の１０問のうち５問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。

問1.　複素ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{iy} \\ e^{-ix} \end{pmatrix}$ に対して次の量を計算せよ。

(a)　２乗ノルム $|\boldsymbol{v}(\vec{r})|^2$

(b)　発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\vec{r})$

(c)　回転 $\nabla \times \boldsymbol{v}(\vec{r})$

ここで、$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は３次元空間の位置ベクトル、i は虚数単位である。

問2.　行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の、互いに直交する３つの固有ベクトルのうち 1 つが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられているとき、残りの 2 つを求めよ。

問3.　n 次元実対称行列 H が $H^2 = E$（E は単位行列）を満たすとき、行列 H が固有値として持ちうる値を全て求めよ。

問4.　次の微分方程式を解き、一般解 $y(x)$ を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

問5.　滑らかな関数 $f(x)$ に対して、次の積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^2 - c^2)dx$$

$\delta(x)$ はデルタ関数、c はゼロでない実数とする。

（次頁につづく）

問6.　i を虚数単位とし、積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - ic} dx$$

を、実数 $c \neq 0$ が正の場合と負の場合に分けて求めよ。

問7.　３次元空間の原点から離れた点 $\vec{R}$ と原点近傍の点 $\vec{r}$ の間の距離 $|\vec{R} - \vec{r}|$ を、$R = |\vec{R}|$ に比べて $r = |\vec{r}|$ が十分に小さいとし、以下のように展開する。

$$|\vec{R} - \vec{r}| = R\left[1 + c_1 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + c_2 \left\{\frac{r^2}{R^2} - \frac{\left(\vec{R} \cdot \vec{r}\right)^2}{R^4}\right\} + \cdots\right]$$

係数 c_1、c_2 の値を求めよ。

問8.　x、y を実変数とし、複素関数

$$2xy + iv(x, y)$$

が複素変数 $z = x + iy$ に関して正則となるような実関数 $v(x, y)$ を一つ求めよ。

問9.　関数 $f(x)$ と $g(x)$ は、微積分方程式

$$f''(x) + g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x - y) g'(y) dy$$

を満たす。このとき、関数 $f(x)$ のフーリエ変換

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

を、$g(x)$ のフーリエ変換 $G(k)$ を用いて書け。ここで、$f' = df/dx$、$g' = dg/dx$、$f'' = d^2 f/dx^2$ である。

問10.　区間 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された２つの実関数 $f(x)$、$g(x)$ の内積を

$$(f|g) \equiv \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

で定義する。関数の組 $\{1,\ x,\ x^2\}$ を規格直交化せよ。

I

Answer five out of the following ten questions, writing the question numbers on the answer sheet clearly.

Q1. Evaluate the following quantities for the complex vector field

$$\boldsymbol{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{iy} \\ e^{-ix} \end{pmatrix}.$$

(a) Squared norm, $|\boldsymbol{v}(\vec{r})|^2$.

(b) Divergence, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\vec{r})$.

(c) Rotation, $\nabla \times \boldsymbol{v}(\vec{r})$.

Here, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ is a position vector in the three-dimensional space and i is the imaginary unit.

Q2. The matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ has three eigenvectors which are orthogonal to each other. When one of them is given as $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, find the other two.

Q3. An n-dimensional real symmetric matrix H satisfies $H^2 = E$ (E: unit matrix). Find all possible eigenvalues of the matrix H.

Q4. Find the general solution of the following differential equation.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

Q5. Evaluate the following integral. Here, $f(x)$ is an arbitrary smooth function, $\delta(x)$ is the Dirac's delta function, and c ($c \neq 0$) is a real number.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^2 - c^2)dx$$

(To be continued on the next page)

Q6. Evaluate the following integral separately divided into cases that a real number c is positive and negative. Here, i is the imaginary unit.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - ic} dx$$

Q7. A point $\vec{R}$ is far from the origin and $\vec{r}$ is near the origin in the three-dimensional space. The distance between the two points $|\vec{R} - \vec{r}|$ is expanded as follows, under the condition that $r = |\vec{r}|$ is sufficiently smaller than $R = |\vec{R}|$.

$$|\vec{R} - \vec{r}| = R\left[1 + c_1 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + c_2 \left\{\frac{r^2}{R^2} - \frac{\left(\vec{R} \cdot \vec{r}\right)^2}{R^4}\right\} + \cdots\right]$$

Find the values of the coefficients c_1 and c_2.

Q8. Find a real function $v(x, y)$ that makes the following complex function holomorphic (regular) with respect to a complex variable $z = x + iy$.

$$2xy + iv(x, y)$$

Here, x and y are real variables.

Q9. Functions $f(x)$ and $g(x)$ satisfy the following integro-differential equation.

$$f''(x) + g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x - y) g'(y) dy.$$

Let us define the Fourier transform of the function $f(x)$ as

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \ .$$

Express $F(k)$ in terms of the Fourier transform $G(k)$ of the function $g(x)$. Here, $f' = df/dx$, $g' = dg/dx$ and $f'' = d^2f/dx^2$.

Q10. The inner product of two real functions, $f(x)$ and $g(x)$ both defined in the interval $-1 \leq x \leq 1$, is given by

$$(f|g) \equiv \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx \ .$$

(To be continued on the next page)

Orthonormalize the set of functions $\{1,\ x,\ x^2\}$.

II.

[A]

問１． 質量Mの質点に対する原点まわりの力のモーメントが$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$であれば、その質点の原点まわりの角運動量$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$が保存されることを示せ。ここで、$\boldsymbol{r}$は質点の位置ベクトル、$\boldsymbol{p}$は質点の運動量、$\boldsymbol{F}$は質点にかかる力をあらわす。

問２． 質量 Mの恒星のまわりを、質量mの惑星が半径rの円運動をしている。$M \gg m$で恒星は静止していると考え、位置エネルギーは無限遠方で$\mathbf{0}$とすると、惑星の全エネルギーEは、

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

となることを示せ。ここで、Gは重力定数である。

問３．図１のようにばね定数kのばねに質量mのおもりをつけて滑らかな床の上で振動させる。ばねの自然長からの変位をxとし、おもりはx方向に振動する。このときのラグランジアンを書き、オイラー・ラグランジュ方程式からおもりの運動方程式を求めよ。

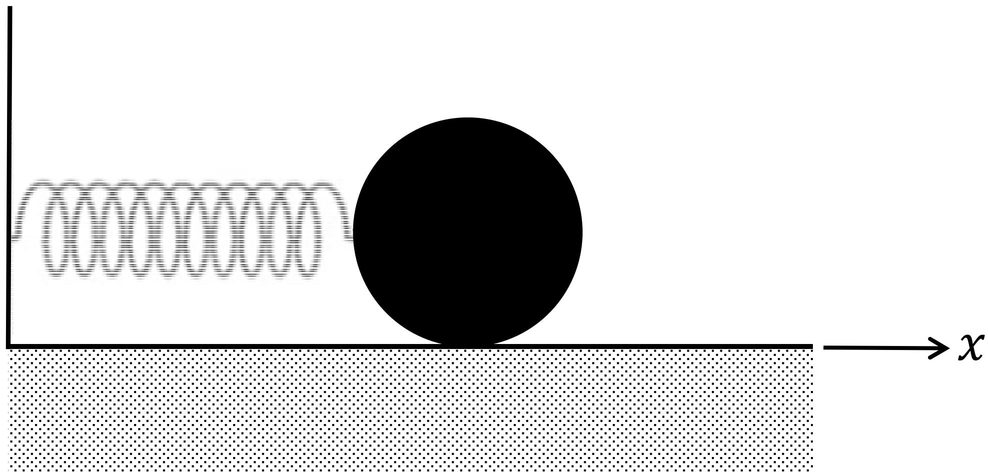

図１

（次頁につづく）

[B]

一様な体積密度で底面の半径a、高さhの円柱を半分に切断し半円柱をつくる。その半円柱を図２のように曲面を下にして水平な床の上に置き、切断面が水平と$\theta_0(< 90°)$の角をなす位置に傾けて静かに手を放す。このとき、半円柱は滑らずに運動するものとする。円柱の重心の位置を O、半円柱の重心の位置を G、O から床におろした垂線と床の交点を P とする。

問 1.　OG の長さが$4a/3\pi$であることを示せ。

問 2.　半円柱の質量をMとする。G を通り半円柱の底面に垂直な軸に関する慣性モーメントをI_Gとすると、$I_G = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) a^2 M$であることを示せ。

問 3.　時刻tでの床と切断面の角度を$\theta(t)$とする。半円柱の曲面と床が接する直線（点 P を通り半円柱の底面に垂直な線）を回転軸としたときの慣性モーメントIを求めθの関数として表せ。

問 4.　地上の重力加速度をgとしたとき、切断面と床との傾きがθのときの半円柱の角速度$\dot{\theta}$をa, g, θ, θ_0を使って表せ。

問 5.　平衡位置$(\theta = 0)$近くで微小振動$(|\theta_0| \ll 1)$しているときの周期Tをa, gを使って表せ。

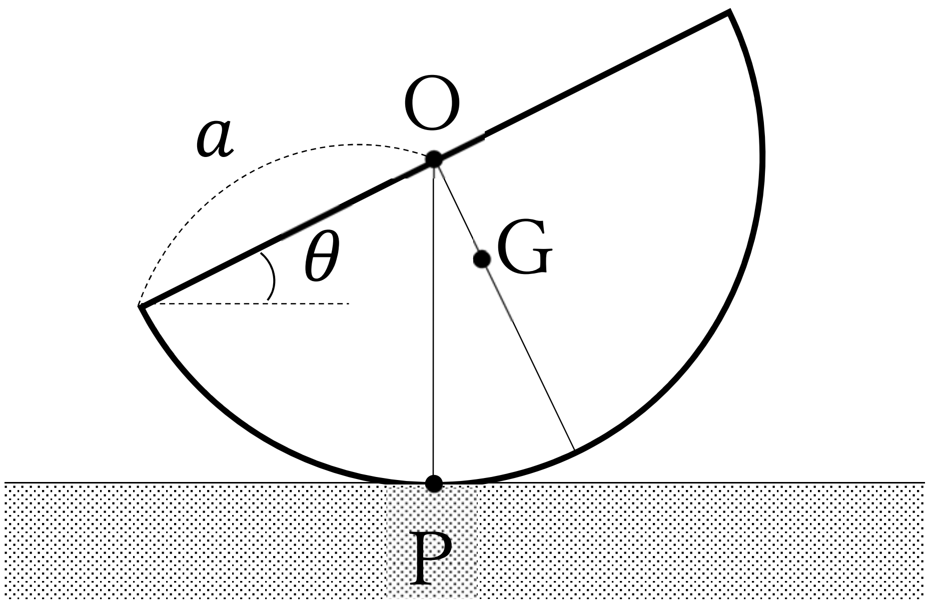

図 2

（次頁につづく）

II.

[A]

Q 1 . Show that the angular momentum of a point mass (mass M) about the origin, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, is conserved when the moment of the force applied to the point mass is given by $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Here, $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$ are the position and momentum vectors of the point mass, respectively, and $\boldsymbol{F}$ is the force vector applied on the point mass.

Q 2 . A planet with mass m is making circular motion around a star with mass M at a radius of r. Assume that $M \gg m$ and the star is at rest. The potential energy at infinite distance is 0. Show that the total energy of the planet is given by

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} ,$$

where G is the gravitational constant.

Q 3 . As shown in Fig. 1, a particle with mass m is connected on a wall by a lightweight spring and is oscillating on the smooth horizontal planar surface. Let the spring constant be k and the displacement from the equilibrium position of the spring be x. The particle is oscillating along the x axis. Write down the Lagrangian L of the particle and derive the equation of motion from the Euler-Lagrange equation.

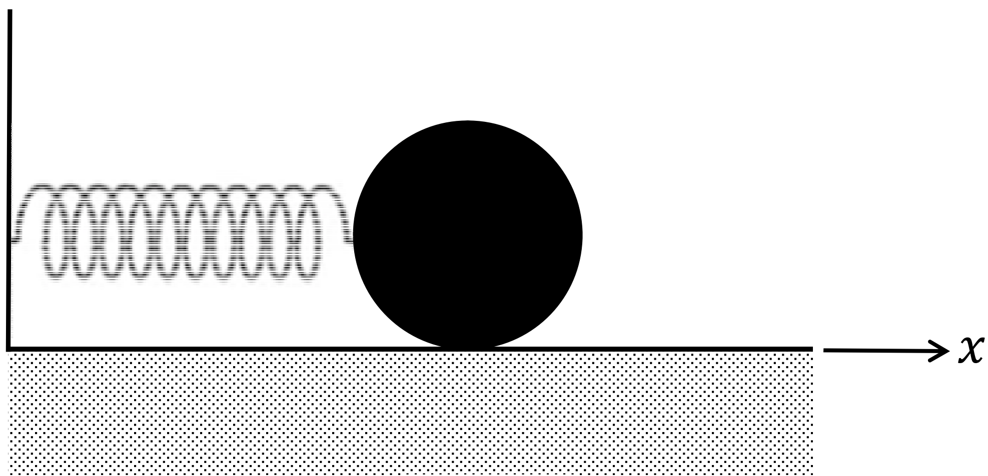

Figure 1

(To be continued on the next page)

[B]

A semicircular cylinder is made by cutting in half a cylinder with a uniform volume density. Let the radius of the base and height of the cylinder be a and h, respectively. As shown in Fig.2, the semicircular cylinder is put on a horizontal planar surface and released at rest. Let the initial angle between the cutting surface and the horizontal plane be θ_0. Assume that the semicircular cylinder moves without slipping. Let the center of mass of the original cylinder be O, that of the semicircular cylinder be G. And the vertical line from O intersects the planar surface at point P.

Q1. Show that the length of OG is $4a/3\pi$.

Q2. Let the mass of the semicircular cylinder be M. Show that the moment of inertia about an axis which passes through G and is perpendicular to the base of the semicircular cylinder is given by

$$I_G = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) a^2 M.$$

Q3. Let the angle between the cut surface of the semicircular cylinder and the horizontal plane at time t be $\theta(t)$. Express the moment of inertia, I, about an axis which passes through P and is perpendicular to the base of the semicircular cylinder as a function of θ.

Q4. Let the gravitational acceleration be g. Express the angular velocity $\dot{\theta}$ of the semicircular cylinder using a, g, θ and θ_0.

Q5. Consider the small-amplitude oscillation ($|\theta_0| \ll 1$) of the semicircular cylinder around the equilibrium position ($\theta = 0$). Write the period of the oscillation, T, using a and g.

(To be continued on the next page)

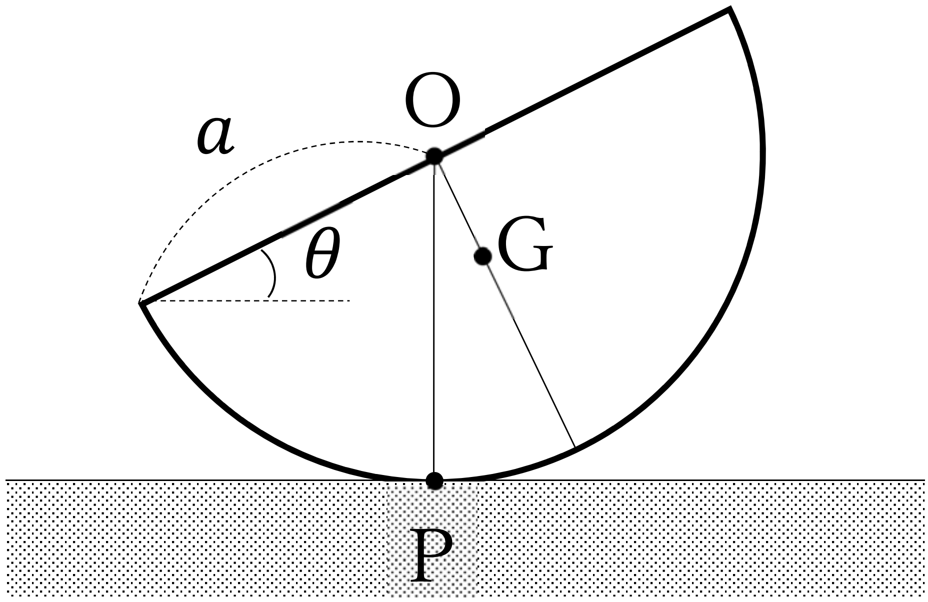

Figure 2

III

$\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) として以下の問 [A],[B] に答えよ。

[A]

問 1． 一般的な量子力学系において、ハミルトニアンはエルミート演算子として与えられる。このエルミート性を用いて、ハミルトニアンの固有値が全て実数であることを示せ。

問 2． $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$ を満たす一次元の運動量演算子 $\hat{p}$ 及び座標演算子 $\hat{x}$ を考える。$\hat{p}$ と $\hat{x}$ はそれぞれ座標表示された波動関数 $\psi(x)$ に対してどのように作用するか述べよ。

問 3． 角運動量演算子 $\vec{\hat{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ について、$\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ の満たす交換関係を書け。

（次頁につづく）

[B]

(x_1, x_2, x_3) を座標とする 3 次元空間において、等方的調和振動子の座標表示でのハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{3}x_i^2 \tag{1}$$

で与えられる。ここで m, ω はそれぞれ粒子の質量と角振動数である。このハミルトニアンに対して、固有状態の波動関数 $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ の満たす固有値方程式

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{2}$$

を考える。以下の設問に答えよ。

問 1． $\psi(x_1, x_2, x_3) = \eta_1(x_1)\eta_2(x_2)\eta_3(x_3)$ と置くと、(2) 式は変数分離することができる。このとき $\eta_i(x_i)(i = 1, 2, 3)$ は次の形の方程式を満たすことを示せ。

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \frac{1}{2}\right)\eta_i(x_i) = E^{(i)}\eta_i(x_i)$$

ただしここで $E^{(i)}$ は x_i 方向の運動に対するエネルギー固有値で、
$E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} = E$ を満たす。また $\hat{a}_i$ は

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{m\omega}{\hbar}x_i\right)$$

で定義される演算子であり、$\hat{a}_i^\dagger$ は $\hat{a}_i$ のエルミート共役を表す。

問 2． 問 1 で定義された演算子 $\hat{a}_i$ を用いて、新たな演算子 $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ を定義する。
このとき $[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger]$, $[\hat{N}_i, \hat{a}_i]$ および $[\hat{N}_i, \hat{a}_i^\dagger]$ を計算せよ。

問 3． $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ は固有値が非負の演算子であることを用いて、ハミルトニアン (1) の基底状態の波動関数 ψ_0 と、基底エネルギー E_0 を求めよ。波動関数の規格化は行わなくてもよい。

問 4． 問 2 の結果を用いて、ハミルトニアン (1) の第 n 励起状態の固有値 E_n と、その縮退度を求めよ。

次に、(1) 式のハミルトニアンに以下のような摂動項が加わった新しいハミルトニアン $\hat{H}'$

（次頁につづく）

を考える。

$$\hat{H}' = \hat{H} + \epsilon x_3^4$$

ここで ϵ は正の微小な定数であり、以下では ϵ の 2 次以上は無視してよいものとする。

問５． $\hat{H}'$ の基底状態のエネルギーを求めよ。必要であれば以下のガウス積分の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^{2n} e^{-ay^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2n)!}{n!(4a)^n} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

問６． $\hat{H}'$ の励起状態の縮退度は $\hat{H}$ の励起状態の縮退度とどのように異なるか述べよ。

III

In the following, let $\hbar = h/(2\pi)$, where h is the Planck constant. Answer the following questions [A] and [B].

[A]

Q1. In a general quantum mechanical system, the Hamiltonian is given as a Hermitian operator. By using the hermiticity of the Hamiltonian, show that all eigenvalues of the Hamiltonian are real numbers.

Q2. Consider the momentum operator $\hat{p}$ and the coordinate (position) operator $\hat{x}$ in one dimension, which satisfy $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$. Write down the actions of $\hat{p}$ and $\hat{x}$ onto a wave function $\psi(x)$ in the position representation.

Q3. For the angular momentum operators $\vec{\hat{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$, write down the commutation relations between $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ and $\hat{J}_3$.

(To be continued on the next page)

[B]

In the 3-dimensional space with coordinates (x_1, x_2, x_3), the Hamiltonian of an isotropic harmonic oscillator in the position representation is given by

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i^2. \tag{1}$$

Here, m and ω are the mass and the angular frequency of the particle, respectively. For this Hamiltonian, consider the eigenvalue equation,

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{2}$$

where $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ is a wave function of an eigenstate. Answer the following questions.

Q1. By putting $\psi(x_1, x_2, x_3) = \eta_1(x_1)\eta_2(x_2)\eta_3(x_3)$, the variables in eq. (2) can be separated. Then, show that $\eta_i(x_i)(i = 1, 2, 3)$ satisfies the following equation,

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2}\right)\eta_i(x_i) = E^{(i)}\eta_i(x_i).$$

Here, $E^{(i)}$ is the energy eigenvalue of the motion in the x_i direction satisfying $E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} = E$. The operator $\hat{a}_i$ is defined by

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{m\omega}{\hbar}x_i\right)$$

and $\hat{a}_i^\dagger$ stands for the Hermitian conjugate of $\hat{a}_i$.

Q2. By using the operator $\hat{a}_i$ defined in Q1, we define a new operator $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Then, compute $[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger]$, $[\hat{N}_i, \hat{a}_i]$ and $[\hat{N}_i, \hat{a}_i^\dagger]$.

Q3. By using the property that the operator $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ has only non-negative eigenvalues, find the wave function ψ_0 and the energy E_0 of the ground state of the Hamiltonian (1). It is not necessary to normalize the wave function.

Q4. By using the results obtained in Q2, find the energy eigenvalue E_n and the degeneracy of the n-th excited states of the Hamiltonian (1).

Next, consider a new Hamiltonian $\hat{H}'$, which is obtained by adding the following pertur-

(To be continued on the next page)

bative term to the Hamiltonian (1),

$$\hat{H}' = \hat{H} + \epsilon x_3^4.$$

Here, ϵ is a very small positive coefficient such that the second or higher powers of ϵ shall be neglected in the following problems.

Q5. Evaluate the energy of the ground state of $\hat{H}'$. If necessary, use the following formulae of Gaussian integrals,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^{2n} e^{-ay^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2n)!}{n!(4a)^n}. \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Q6. Explain how the degeneracies of excited states of $\hat{H}'$ are different from those of $\hat{H}$.

IV

[A]

起電力 ϕ の電池，抵抗 R および自己インダクタンス L のコイルを図 1 のように接続し，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を A につないだ。以下の問に答えよ。

問 1. 回路を流れる電流 I を決定する 1 階の微分方程式を示せ。

問 2. $\phi = 5$ V，$R = 100$ Ω，$L = 1$ H としたときの電流 I の時間変化を図示せよ。

問 3. 十分に時間が経過した後にスイッチを B に切り替えた。このとき，電流 I の時間変化を，ϕ，R，L を用いて説明せよ。

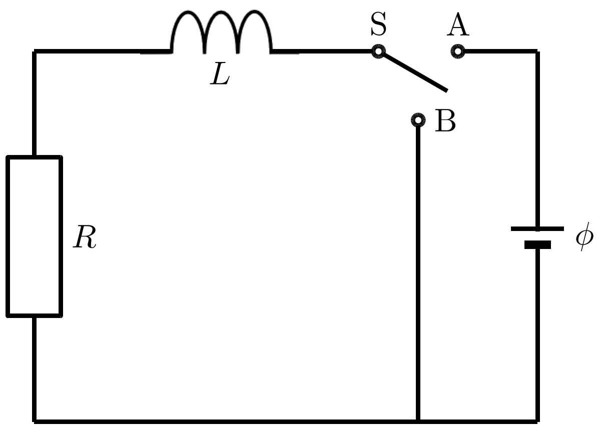

図 1

（次頁につづく）

[B]

静電容量 C のコンデンサー，抵抗 R および自己インダクタンス L のコイルを図 2 のように接続し，コンデンサーを充電してから，スイッチ S を閉じた。ある時刻 t における電流を I，コンデンサーの極板上の電荷量を $\pm Q$ として，以下の問に答えよ。

問 1. コンデンサーが，面積 S の長方形の導体板間の距離が d の平行平板コンデンサーであるとする。コンデンサー内部の誘電率を ϵ とする。コンデンサーの静電容量 C と電場のエネルギー U_C を，Q，S，d，ϵ の中から必要なものを用いて表せ。但し，d は非常に小さく，導体板の端での電場の乱れは無視できるものとする。

問 2. コイルが，断面積 S'，長さ d'，単位長さあたりの巻き数 n のソレノイドであるとする。ソレノイド内部の透磁率を μ とする。ソレノイドの自己インダクタンス L と磁場のエネルギー U_L を，I，S'，d'，n，μ の中から必要なものを用いて表せ。但し，ソレノイドの長さは十分に長く，ソレノイドの端での磁場の乱れは無視できるものとする。

問 3. コンデンサー C とコイル L の電磁場エネルギー U_{CL} および抵抗 R に発生するジュール熱 W_R との間の関係式を導き，その物理的意味を述べよ。

問 4. 次の条件に分けて電流 I の時間変化を求め，それぞれの様子を図示して説明せよ。

(a) $4L > CR^2$

(b) $4L = CR^2$

(c) $4L < CR^2$

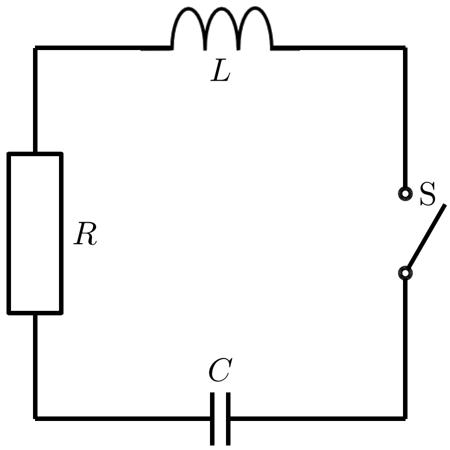

図 2

IV

[A]

A battery with electromotive force ϕ, a resistance R, and a coil with self-inductance L are connected as shown in Figure 1. At time $t = 0$, the switch S is connected to A. Answer the following questions.

Q1. Show the first-order differential equation that determines the electric current I which flows through the circuit.

Q2. For $\phi = 5$ V, $R = 100\ \Omega$, and $L = 1$ H, plot the electric current I as a function of time.

Q3. After a long time has passed, the switch S is changed to B from A. Explain the time dependence of the electric current I using ϕ, R, and L.

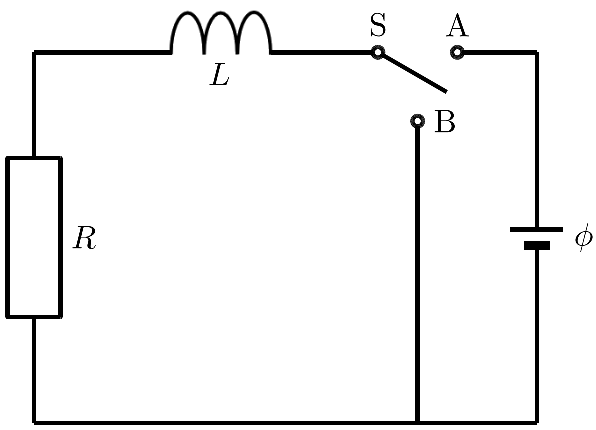

Figure 1

(To be continued on the next page)

[B]

A capacitor with electrostatic capacitance C, a resistance R, and a coil with self-inductance L are connected as shown in Figure 2. After the capacitor is charged, the switch S is closed. At time t, the electric current through the circuit is given by I, and the capacitor holds the electric charge $\pm Q$. Answer the following questions.

Q1. Suppose that the capacitor is composed of two thin, parallel, rectangular conducting plates of cross-sectional area S which are separated by a distance d. A dielectric constant in the capacitor is given by ϵ. Express the electrostatic capacitance of the capacitor C and the electric field energy U_C using of Q, S, d, and ϵ. Here, d is very small and the disorder of the electric field at the edge of conducting plates is negligible.

Q2. Suppose that the coil is a solenoid coil with cross-sectional area S', length d', and the number of turns per unit length n. A magnetic permeability in the solenoid coil is given by μ. Express the self-inductance of the solenoid L and the magnetic field energy U_L using of I, S', d', n, and μ. Here, d' is very large and the disorder of the magnetic field at the edge of solenoid is negligible.

Q3. Derive a relation between the electromagnetic energy U_{CL} for the capacitor C and coil L, and the Joule heat W_R for the resistance R, and discuss the physical meaning.

Q4. Calculate the time dependence of the electric current I under the following conditions. Then, plot and explain the behaviors.

(a) $4L > CR^2$

(b) $4L = CR^2$

(c) $4L < CR^2$

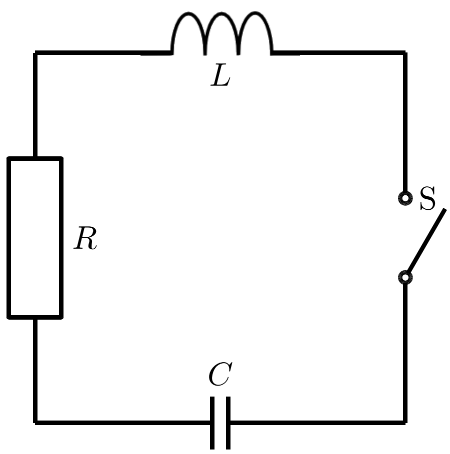

Figure 2

V

以下の問 [A]、[B] に答えよ。ボルツマン定数を k とする。

[A]

問 1. ミクロカノニカル分布において、エントロピー S と微視的状態数 W の間に成り立つ関係式を記せ。

問 2. カノニカル分布において、分配関数（状態和）Z、ヘルムホルツの自由エネルギー F、温度 T の間に成り立つ関係式を記せ。

問 3. 以下の状態量を示強性状態量か示量性状態量のいずれかに分類せよ。
化学ポテンシャル、圧力、エントロピー、体積、温度、分子数

（次頁につづく）

[B]

N 個の独立な二原子分子からなる理想気体が温度 T の熱平衡状態にある。分子を剛体でできた回転子と考える。分子軸に垂直で、重心を通る回転軸の周りの慣性モーメントを I、プランク定数を h (ただし、$\hbar = h/2\pi$)、回転量子数を J とする。分子の回転運動のエネルギー固有値 E_J と縮重度 W_J は

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1), \quad W_J = 2J+1 \quad (J = 0, 1, 2, \ldots)$$

と書ける。問 1 から問 3 までは、分子の回転運動以外の自由度は考慮しなくてよい。

問 1. 分子一個の分配関数と N 個の分配関数を記せ。

問 2. 気体が低温 $(kT \ll \hbar^2/2I)$ であるとする。低温では $J = 0, 1$ のエネルギー状態しかとらないとしてよい。分子一個あたりの回転エネルギーの平均値と熱容量を求めよ。

問 3. 気体が高温 $(kT \gg \hbar^2/2I)$ であるとする。分配関数の各項は J についてなめらかに変化するので、和は積分に置き換えてよい。分子一個あたりの回転エネルギーの平均値と熱容量を求めよ。

以下では、回転運動に加えて核のスピンを考える。電子状態は考慮しなくてよい。分子を構成する二個の核は同種で、スピンは 1/2 とする。分子はフェルミ粒子系であるから、パウリの原理より、その波動関数 $\Psi(1,2)$ （1,2 はスピン座標を含んだ核の座標）は核の交換に対して反対称でなければならない。すなわち、

$$\Psi(2,1) = -\Psi(1,2)$$

Ψ はスピン関数 ϕ_s と回転状態を表す波動関数 ϕ_r の積で表される。合成スピン量子数を S とすると、ϕ_s は核の交換に関して次の関係式を満たす。

$$\phi_s(2,1) = \begin{cases} \phi_s(1,2) & (S=1) \\ -\phi_s(1,2) & (S=0) \end{cases}$$

回転量子数 J の状態にある波動関数 ϕ_r は、以下のように変換される。

$$\phi_r(2,1) = (-1)^J \cdot \phi_r(1,2) \quad (J = 0, 1, 2, \ldots)$$

以下の問に答えよ。

（次頁につづく）

問 4. $S = 0$ の状態にある分子が取り得る J の値を求めよ。同様に、$S = 1$ の状態の分子に許される J の値を求めよ。

問 5. $S = 0, 1$ それぞれの状態に対して分配関数の表式を求めよ。$T \to 0$ における $S = 0$ の分子の割合を求めよ。

V

Answer the following questions [A] and [B]. Let the Boltzmann constant be k.

[A]

Q1. Write down the relation between the entropy S and the number of microscopic states W in the microcanonical distribution.

Q2. Write down the relation among the partition function (sum over states) Z, the Helmholtz free energy F and the temperature T in the canonical distribution.

Q3. Answer whether each of the state quantities listed below is intensive or extensive.

chemical potential, pressure, entropy, volume, temperature, number of molecule

(To be continued on the next page)

[B]

Consider an ideal gas consisting of N independent diatomic molecules. Suppose that the gas is in thermal equilibrium at the temperature T. Let us adopt a rigid rotator model to the molecule. Let I be the moment of inertia around a line perpendicular to the axis and through the center of mass, h be the Planck constant ($\hbar = h/2\pi$), and J be the rotational quantum number. The rotational energy eigenvalue E_J and its degeneracy W_J are given as follows:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1), \quad W_J = 2J+1 \quad (J = 0, 1, 2, \ldots).$$

From Q1 to Q3, neglect all the degrees of freedom except for the rotational motion.

Q1. Write down the partition function of a single molecule, and that of N molecules.

Q2. Suppose that the temperature is low ($kT \ll \hbar^2/2I$) and only the states $J = 0, 1$ participate in the rotation. Find the thermal average of rotational energy per molecule, and the heat capacity.

Q3. Suppose that the temperature is high ($kT \gg \hbar^2/2I$) and each term in the partition function varies smoothly with J, and hence the sum can be replaced with the integration. Find the thermal average of rotational energy per molecule, and the heat capacity.

Let us hereafter consider the nuclear spin in addition to the rotational motion. Neglect any electronic-state effects. Suppose that the molecule consists of two nuclei of the same kind and both have spin 1/2. Since the molecule is a fermion system, the Pauli principle requires the wave function $\Psi(1, 2)$, where 1,2 denote the nuclear coordinates including the spin coordinates, to be antisymmetric with respect to the exchange of the nuclear coordinates. Namely,

$$\Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2).$$

Ψ is given by the product of the spin function ϕ_s and the rotational wave function ϕ_r.

(To be continued on the next page)

ϕ_s satisfies the following relationship with respect to the nuclear exchange:

$$\phi_s(2,1) = \begin{cases} \phi_s(1,2) & (S=1) \\ -\phi_s(1,2) & (S=0), \end{cases}$$

where S is the total spin quantum number. ϕ_r with the rotational quantum number J is transformed as below:

$$\phi_r(2,1) = (-1)^J \cdot \phi_r(1,2) \quad (J = 0, 1, 2, \ldots).$$

Answer the following questions.

Q4. Find the value of J allowed for the state $S = 0$. And find the value of J allowed for the state $S = 1$.

Q5. Find the partition functions for $S = 0$ and $S = 1$. Evaluate the fraction of the molecule with $S = 0$ at $T \to 0$.